Matrix

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ find $A^{-1} = ?$

Sol^n:- we use column elementary operation:-

$\therefore \quad A = AI$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2-2 \\ 2 & -1-4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0-2 \\ 0 & 1-0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow C_2 \rightarrow \dfrac{-C_2}{5}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix}$

$C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-0 & 0 \\ 2-2 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1-4/5 & 2/5 \\ 0+2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

Here:- $\boxed{I = A \cdot B}$ Here B is inverse of A.

So $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = B}$

Matrix

Ex:- if $B = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ then find B^{-1} if exists ?

Soln:- Row Elementary operation:-

$\Rightarrow$ $A = IA \Rightarrow \boxed{I = BA}$

$\therefore \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$R_2 \to 2R_2 + R_1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -10+10 & 2+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0+1 & 2+0 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A$

Here $R_2 = 0$ so A^{-1} is not define.

Column Elementary operation:-

$\Rightarrow A = AI$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_1 \to C_1 + 5C_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10+(-10) & -2 \\ -5+5 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1+0 & 0 \\ 0+5 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Here $C_1 = 0$ i.e. A^{-1} is not exist

Matrix

Ex1:- $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to$ find $A^{-1} \Rightarrow$ if exist:-

Soln:- use Row elementary operation..

$\therefore \quad A = IA$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\Rightarrow \quad R_2 \to R_2 - R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2-2 & 2+3 & 3-3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to \frac{1}{5} R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3 \to 2R_3 - 3R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-6 & -4+9 & 4-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0-3 & 0-0 & 2-0 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} A$$

$\Rightarrow R_3 \to -\frac{1}{5} R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} A$

Matrix

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 + 3R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+0 & -3+3 & 3+0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & 6/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$\Rightarrow R_1 \to \frac{1}{2} R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 0 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$\Rightarrow \boxed{I = BA}$

So here B is inverse of A i.e. $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 0 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} A$$

$\Rightarrow R_3 \to -\frac{1}{5} R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow R_3 \to R_3 + R_2$

Matrix

Qus:- $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ find Matrix D such that:-

$$\boxed{CD - AB = 0}$$

Sol^n: Here $CD - AB$ is already given.

i.e. D has a order 2×2

Let $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

So, $CD - AB$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10-7 & 4-4 \\ 15+28 & 6+16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = LHS$$

Now LHS = RHS

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2a+5c-3=0$ — (1)

$3a+8c-43=0$ — (2)

$2b+5d=0$ — (3)

$3b+8d-22=0$ — (4)